The Harmonic Series at the International Mathematical Olympiad

Juan López Linares, Alexys Bruno-Alfonso and
Grazielle Feliciani Barbosa

June 9, 2019

A Série Harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática

Juan López Linares
USP, Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos.
jlopez@usp.br

Alexys Bruno-Alfonso
UNESP, Faculdade de Ciências de Bauru, Departamento de Matemática.
alexys.bruno-alfonso@unesp.br

Grazielle Feliciani Barbosa
UFSCar, Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia.
grazielle@dm.ufscar.br

Resumo: O propósito deste trabalho é discutir três problemas que foram propostos à Olimpíada Internacional de Matemática e que lidam diretamente ou indiretamente com a série harmônica. Os mesmos podem ser usados no treinamentos de estudantes de Ensino Médio para este tipo de competição ou em cursos universitários das ciências exatas e engenharias.

Palavras-chave: Ensino. Olimpíadas de Matemática. Séries. Sequências.

Introdução

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, International Mathematical Olympiad) é uma competição para estudantes do Ensino Médio que é realizada anualmente desde 1959. Atualmente é a competição de Matemática pré-universitária mais prestigiada. Cada delegação (menos o país sede) pode enviar problemas para formar a base de dados inicial (LongList, LL). Os mesmos não podem ter sido usados em competições anteriores, nem publicados e devem abranger vários tópicos. O país sede da competição cria um Comitê de Seleção que escolhe os melhores problemas da LL para formar uma lista menor (ShortList, SL). Os professores líderes de cada país participante recebem a SL no primeiro dia da reunião de líderes e escolhem os seis problemas que serão usados no certame (IMO, 2019).

Devemos salientar que, devido à criatividade dos proponentes, a resolução dos problemas pode levar bastante tempo ou requerem muito treinamento. Para facilitar a aprendizagem da comunidade, algumas dicas e pontos cruciais de resoluções estão disponíveis. Entretanto, é preciso fazer um esforço adicional para elaborar resoluções detalhadas e preparar exposições para o treinamento e a sala de aula. Mediante este trabalho, visamos divulgar curiosidades e habilidades de resolução relacionadas à série harmônica. Por vezes, ela desafia a nossa intuição, pelo fato de ser divergente, com o termo geral convergindo para zero (LIMA, 2016). Concomitantemente, esperamos aumentar a motivação da comunidade regional de professores e estudantes para participar no movimento da Olimpíada Internacional de Matemática, assim como de competições nacionais e regionais desta disciplina.

Discutimos três problemas. O primeiro foi proposto para a IMO de 1975 e aprofunda o entendimento da série harmônica. Retirando uma subsequência infinita, a série harmônica continua sendo divergente? O segundo foi proposto para a IMO de 1979 e escolhido como primeira pergunta da competição. Neste caso o foco está em uma soma parcial da série harmônica alternada. O terceiro problema foi proposto para a IMO de 2001 e lida com uma desigualdade satisfeita por uma sequência. Aparentemente não relacionado aos anteriores, mas no final da demostração, será conveniente usar a série harmônica novamente.

Variação da série harmônica (SL da IMO 1975, problema 5)

A IMO 1975 foi realizada na cidade de Burgas, Bulgaria (IMO, 2019). O seguinte problema foi proposto pela delegação da Suécia (DJUKIĆ, 2006).

Problema. Seja M o conjunto de todos os inteiros estritamente positivos cuja representação decimal não contém o dígito 9. Se $x_1, \ldots, x_n$ é uma sequência finita de elementos diferentes, escolhidos arbitrariamente do conjunto M. Provar que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} < 80. \tag{1}$$

Resolução: A soma

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \tag{2}$$

onde n é um número natural, supera qualquer número natural pré-fixado, por grande que este seja (LIMA, 2016). Para tanto, basta que n seja suficientemente grande. É a conhecida série harmônica, divergente quando n tende a infinito.

O problema desta seção propõe um resultado aparentemente contraditório. Mesmo sabendo que a série harmônica é divergente, podemos ter a impressão de que os números com 9 na sua representação decimal são raros, e que sua exclusão pouco afetaria a divergência da soma. A chave para resolver o conflito está na contagem dos elementos de M com uma quantidade pré-fixada de dígitos.

Denotemos por S o conjunto dos elementos de M selecionados para calcular a soma dos inversos. Consideremos o conjunto S_k dos elementos de S com k dígitos. Quantos números há em S_k? Essa quantidade, que denotamos por N_k, depende do conjunto S. No máximo, teremos 8 escolhas para o primeiro dígito da esquerda e 9 escolhas para os outros $k-1$ dígitos. Pelo princípio multiplicativo, temos que $N_k \leq 8 \cdot 9^{k-1}$números de k dígitos.

Denotando por K a quantidade de dígitos do maior elemento de S, temos que

$$S = \bigcup_{k=1}^{K} S_k. \tag{3}$$

Então, podemos escrever o somatório em (1) como uma soma dupla:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} = \sum_{x \in S} \frac{1}{x} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{x \in S_k} \frac{1}{x}. \tag{4}$$

Adicionalmente, sabemos que cada elemento x de S_k satisfaz que $10^{k-1} \leq x < 10^k$. Portanto, temos que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} \leq \sum_{k=1}^{K} \sum_{x \in S_k} \frac{1}{10^{k-1}} = \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{1}{10^{k-1}} \sum_{x \in S_k} 1 \right) = \sum_{k=1}^{K} \frac{N_k}{10^{k-1}} \leq \sum_{k=1}^{K} \frac{8 \cdot 9^{k-1}}{10^{k-1}} = 8 \sum_{k=0}^{K-1} \left(\frac{9}{10} \right)^k. \tag{5}$$

Para finalizar a resolução, usamos a fórmula da soma da progressão geométrica de razão q com primeiro termo igual a 1, isto é,

$$\sum_{k=0}^{K-1} q^k = \frac{1-q^K}{1-q}. \tag{6}$$

Concluímos que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} < 8 \sum_{k=0}^{K-1} \left(\frac{9}{10} \right)^k = 8 \, \frac{1 - \left(\frac{9}{10}\right)^K}{1 - \frac{9}{10}} = 80 \left(1 - \left(\frac{9}{10} \right)^K \right) \tag{7}$$

e, portanto,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j} < 80. \tag{8}$$

Observações: Uma vez discutida esta resolução, os professores e estudantes podem propor ou questionar sobre outros métodos de demonstração, sobre uma estimativa do valor da soma dos inversos de todos os elementos de M, ou sobre o número mínimo de termos que é preciso considerar para superar, por exemplo, o valor 12. Testes com auxílio do software Mathematica indicam que esse número é 6110520 (mais de 6 milhões!).

Série harmônica alternada (IMO 1979, problema 1)

A IMO 1979 foi realizada na cidade de Londres, Reino Unido (IMO, 2019). O seguinte problema foi proposto pela delegação da antiga Alemanha Ocidental (DJUKIĆ, 2006).

Problema: Dado que

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}=\frac{p}{q}, \tag{9}$$

sendo p e q números naturais, primos entre si, provar que p é divisível por 1979.

Resolução: Considerando

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}, \tag{10}$$

as leis comutativa e associativa da adição permitem separar S como diferença das somas de inversos dos números ímpares e dos números pares:

$$S=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{1319}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1318}\right). \tag{11}$$

Somando $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1318}$ em ambos termos, encontramos

$$\begin{aligned} S &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1318}\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{659}\right) \\ &= \frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\frac{1}{662}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}=\sum_{n=660}^{1319}\frac{1}{n}=\sum_{n=660}^{1979-660}\frac{1}{n}. \end{aligned} \tag{12}$$

A última soma tem 660 termos. Vamos dividir em dois somatórios de 330 termos:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=660}^{989}\frac{1}{n}+\sum_{n=1979-989}^{1979-660}\frac{1}{n}=\sum_{n=660}^{989}\frac{1}{n}+\sum_{n=660}^{989}\frac{1}{1979-n} \\ &= \sum_{n=660}^{989}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{1979-n}\right)=\sum_{n=660}^{989}\frac{1979}{n(1979-n)}=1979\sum_{n=660}^{989}\frac{1}{n(1979-n)}=1979F, \end{aligned} \tag{13}$$

em que

$$F=\sum_{n=660}^{989}\frac{1}{n(1979-n)}. \tag{14}$$

Neste ponto é muito importante saber ou verificar que 1979 é um número primo. Então, 1979 e o denominador da forma irredutível de F são primos entre si. Se assim não fosse, o denominador teria que ser divisível por 1979. Para tanto, algum dos denominadores da forma $n(1979-n)$, com $660 \leq n \leq 989$, teria que ser divisível por 1979. Mas isso não acontece.

Concluímos que a forma irredutível de F é m/q, com m sendo um número natural, e

$$S = \frac{1979\,m}{q} = \frac{p}{q}. \tag{15}$$

Portanto, temos que $p = 1979\,m$, ou seja, p é divisível por 1979.

Observações: Ao finalizar a resolução pode restar a curiosidade de saber quanto valem p, m e q. Com o auxílio do software Mathematica obtemos

$$\begin{aligned} p \;=\; & 9712435370176457211789032112275705035436058023056668172162691122769643\\ & 5361349633888874185035182122277071818873992844213242099915802613721808\\ & 8106604226734001382254302163099379030187191730667247900374234773190689\\ & 4502206611684973377349822140727866748793472314555146081954133359219693\\ & 2248423457162015628381131104886642299904432585085953323951296172861435\\ & 8089856690812823243618746637187164109560825785983266985958715907797284\\ & 3255741143946005144546720084104126426401254209483858435525146637078869\\ & 4520567887089446089600167121804095156683019096860563636540398233512644\\ & 66923197720153813, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m \;=\; & 4907749050114430122177378530710310780917664488659256276989737808372735\\ & 4907200421368809593246681213884321282907525439218414401170188283841237\\ & 3980093090820617171427136009651025280539258075122409247283595135518286\\ & 7358366150421916815234877281823075668920400361068795392599359959181249\\ & 7346348386640735537332557405197899090401431321417864236458461936766768\\ & 9787699186868531199403105930867692829490058507318477506800765996865732\\ & 3524881831200608966420778213291625278626202228137371619770159998523936\\ & 0546017123339790848711554887217834844205669073704175662728852063422256\\ & 02285597635247 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} q \;=\; & 1400442637019488046193434368204477439128283303112791074629778678195910\\ & 5584828861694180270900155320736866485178357969757814225700469374818454\\ & 1862705601564196861165420290276967428704882777135730145988702063975124\\ & 8870614151719342612208623163417808023772306544868259813118259762352731\\ & 3179068878231298472650458406330723014358986732179004322578669107971003\\ & 1623722627749211098359805515007678987974523047996280718491866332847210\\ & 9316343903768300078189869559464609212486794105953245314072098499327570\\ & 3737648888419223774236963722967299484493466538792766661068428697404447\\ & 683623975519360000 \end{aligned}$$

Um aspecto muito interessante deste tipo de problema é a possibilidade de generalização. Por exemplo, se a Olimpíada ocorresse num outro ano primo, por exemplo, 2027 ou 2029, em qual número deveria ser truncada a série harmônica alternada para que o problema pudesse ser resolvido pelo mesmo método?

Desigualdade de Bernoulli e série harmônica (SL da IMO 2001, problema A2)

A IMO 2001 foi realizada na cidade de Washington, Estados Unidos (IMO, 2019). O problema que segue foi proposto pela delegação da Polônia (DJUKIĆ, 2006).

Problema: Seja $a_0, a_1, a_2, \ldots$ uma sequência infinita e arbitrária de números positivos. Mostrar que a desigualdade

$$1 + a_n > a_{n-1}\sqrt[n]{2} \tag{16}$$

é válida para um número infinito de inteiros positivos n.

Resolução: Para verificar a proposição no enunciado do problema, podemos proceder por contradição. Tentaremos provar que se existisse um número natural N tal que a desigualdade é inválida para cada n maior ou igual que N, então aconteceria uma contradição.

Para tratar a raiz n-ésima de 2, convém usar a desigualdade de Bernoulli. Esta vale para todo x real maior que -1, todo n natural e tem a forma

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{17}$$

Para o caso particular $x = 1/n$ temos

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2, \tag{18}$$

ou seja,

$$1 + \frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{2}. \tag{19}$$

Se $n \geq N$ implica

$$1 + a_n \leq a_{n-1}\sqrt[n]{2}, \tag{20}$$

também garante que

$$1 + a_n \leq a_{n-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right). \tag{21}$$

Dividindo os dois lados de (21) por $n+1$, teremos

$$\frac{1}{n+1} + \frac{a_n}{n+1} \leq \frac{a_{n-1}}{n}, \tag{22}$$

ou seja

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{a_{n-1}}{n} - \frac{a_n}{n+1}. \tag{23}$$

Então, somando os termos de cada lado com n variando de N até um número natural $m-1$ maior que N, teremos

$$\sum_{n=N}^{m-1} \frac{1}{n+1} \leq \sum_{n=N}^{m-1}\left(\frac{a_{n-1}}{n} - \frac{a_n}{n+1}\right) = \frac{a_{N-1}}{N} - \frac{a_{m-1}}{m} < \frac{a_{N-1}}{N}. \tag{24}$$

Aqui a somatória se simplifica por se tratar de soma telescópica.

Nessas condições, teríamos que

$$\sum_{n=N+1}^{m} \frac{1}{n} < \frac{a_{N-1}}{N}, \tag{25}$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} < \frac{a_{N-1}}{N} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}, \tag{26}$$

em que m pode tomar valores arbitrariamente grandes. Isto significa que as somas parciais da série harmônica estariam limitadas superiormente, o que estaria em contradição com o caráter ilimitado desta série (LIMA, 2016). Desta forma, fica demonstrada a proposição do enunciado.

Observações: Para começar compreender o significado da desigualdade, poderíamos violar sua validade mediante a relação de recorrência

$$a_n = a_{n-1}\sqrt[n]{2} - 1. \tag{27}$$

A Figura 1 mostra os valores da sequência para $a_1 = 25$. Aparentemente, neste caso, a violação da desigualdade acarreta em que todos os termos sejam negativos a partir de $n = 558$.

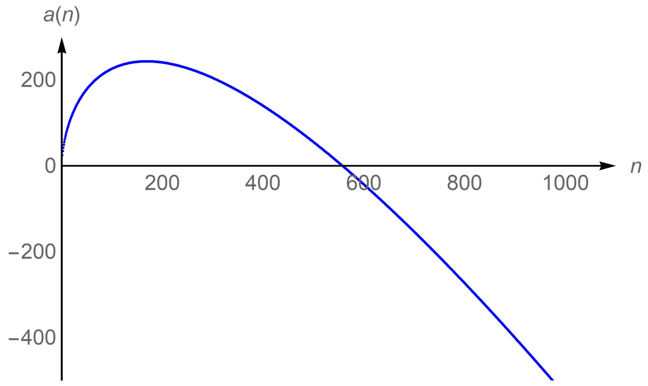

Figura 1: Valores da sequência a_n com $a_1 = 25$ e $a_n = a_{n-1}\sqrt[n]{2} - 1$.

Também é interessante notar que a sequência $(1 + 1/n)^n$, na Equação (18), é crescente e tende ao número de Euler, e, quando n tende a infinito. Uma outra reflexão que professores e alunos poderiam fazer tem a ver com o fator $\sqrt[n]{2}$. A base 2 poderia ser substituída por um outro número, por exemplo, 1.5, e ou 3. O que aconteceria?

Conclusões

Da Olimpíada Internacional de Matemática, resolvemos três problemas que lidam direta ou indiretamente com a série harmônica. Os mesmos podem ser usados para o treinamento de estudantes do Ensino Médio para este tipo de competição ou com alunos universitários. Nos três casos, apresentamos observações sobre o enunciado e possíveis generalizações. Também apresentamos resultados numéricos ou gráficos obtidos com uso de computador, visando ajudar compreender melhor os problemas resolvidos.

Referências

DJUKIĆ D. et al. The IMO Compendium - A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2004, Springer, 2006.

IMO - International Mathematical Olympiad, http://www.imo-official.org/problems.aspx. Acesso em: 13 abr. 2019.

LIMA, E. L. **Análise real, v. 1**, Rio de Janeiro, IMPA, 2016.